Übung IV zum Repetitorium zu MATHEMATISCHE METHODEN DER PHYSIK
Newton'sche Mechanik WiSe 2022/23
09.03.2023

NEWTON'SCHE MECHANIK

[R15*] *Die Lüge mit der Wurfparabel*

Die Bahnkurve eines Steines, der in der Höhe h (damit ist gemeint $x(0) = 0, y(0) = h \ll R$) horizontal geworfen wird (also $\dot{x}(0) = v_0 \ll R\sqrt{g/h}, \dot{y}(0) = 0$), ist keine Wurfparabel, auch im Vakuum nicht. Genau genommen ist die Bahnkurve ein Stück einer Planetenbahn. Wir wollen uns zumindest die erste Korrektur zur Wurfparabel hier klar machen.

(a) Schreibe das Potential als Reihe bis einschließlich zur Ordnung $1/R$, vernachlässige Terme der Ordnung $1/R^2$. *Hinweis:* $g := GM/R^2$ einführen und dann die *verbleibenden* R-Potenzen bis $1/R$ mitnehmen.

(b) Berechne aus dieser Näherung des Potentials die Kraft.

(c) Löse mit dieser Kraft die Newton'sche Bewegungsgleichung. *Hinweis:* Konsequenterweise sind auch in der Lösung $x(t), y(t)$ alle Terme der Ordnung $1/R^2$ zu vernachlässigen.

(d) Eliminiere t aus der Bahnkurve, um eine Funktion $y(x)$ oder $x(y)$ zu erhalten.

[R16] *Potential bestimmen*

Gegeben sei die Kraft $\vec{F}(x, y, z) = -\kappa \begin{pmatrix} 4xy + 2xz + yz \\ 2(x^2 + 2yz) + 3y^2 + xz \\ 2y^2 + x^2 + xy \end{pmatrix}$.

(a) Überprüfe, dass ein Potential existiert.

(b) Bestimme das Potential $V(x, y, z)$ für die Kraft $\vec{F}(x, y, z)$.

[R17] *Kraftfeld*

Betrachte in drei Dimensionen das Potential $V(\vec{r}) = -(\vec{a} \cdot \vec{r})/r$, wobei $\vec{a}$ ein konstanter Vektor und wie üblich $r = |\vec{r}|$ ist.

(a) Berechne das zugehörige Kraftfeld.

(b) Zeige, dass die Kraft senkrecht auf dem Ortsvektor steht, dass also $\vec{F} \perp \vec{r}$ ist.

(c) Was bedeutet dies für die Arbeit, die bei einer *radialen* Bewegung verrichtet werden muss?

(d) Wie sehen die Äquipotentiallinien in der xy-Ebene aus? Fertige hierfür eine Skizze mit $\vec{a} = \vec{e}_2 = (0, 1, 0)$ an.

[R18] *Kleine Schwingungen*

Zwei (punktförmige) gleiche Sterne, Masse jeweils M, bilden ein Doppelsternsystem. Im Schwerpunktsystem liegen die Sterne fest bei $(0, 0, -a)$ und $(0, 0, a)$ auf der z-Achse.

(a) Gib das Gravitationspotentials $V(\vec{r})$ an. *Hinweis:* Superposition.

(b) Leite her, mit welcher Kreisfrequenz ω eine Raumsonde der Masse m auf der x-Achse kleine Schwingungen um den Ursprung ausführt. *Hinweis:* $\ddot{x} = -\omega^2 x + \mathcal{O}(x^2)$.

(c) Berechne die Mindestgeschwindigkeit v_∞, die die Raumsonde am Ursprung haben müsste, um das Doppelsternsystem für immer verlassen zu können. *Hinweis:* Energiesatz.

[R19] *Alle eindimensionalen Bewegungen im konversativen Kraftfeld*

Gegeben sei ein Teilchen mit Masse m und Anfangsposition $x(0) = x_0$ und Anfangsgeschwindigkeit $v(0) = v_0$. Es bewege sich in einem belieben *eindimensional* konservativen Kraftfeld $F = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}V(x)$.

(a) Gib eine Strategie an, die Bahnkurve zu bestimmen.

(b) Wende dies auf das Potential $V(x) = x^2 \frac{\kappa}{2}$ an und prüfe, dass dies die zwei üblichen Lösungen für die Anfangsbedinungen $x(0) = 0$, $v(0) = v_0$ und $x(0) = x_0$ und $v(0) = 0$ reproduziert.